SERIE NUMERICHE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ dove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione.

Sia $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & se \quad |a|<1 \\ +\infty & se \quad a \geq 1 \\ non\ esiste & se \quad a \leq 1 \end{cases}$$

CONDIZIONE NECESSARIA ALLA CONVERGENZA

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ allora la serie può convergere, se questo limite non fa zero allora la serie non può convergere

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

CRITERIO DEL CONFRONTO

Se $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n > \overline{n} \quad \Rightarrow \begin{cases} se \ \sum a_n = +\infty & \Rightarrow \ \sum b_n = +\infty \\ se \ \sum b_n < +\infty & \Rightarrow \ \sum a_n < +\infty \\ Negli\ Altri\ casi \ ??? \end{cases}$

Esempio

Si vuole valutare il carattere della serie $\sum \frac{\cos n}{n^2}$

Basta osservare che $\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e che $\sum \frac{1}{n^2}$ è la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$ quindi converge

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se $a_n \geq 0 \ e \ \ b_n \geq 0 \quad \forall n > \overline{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

$$Se\quad l\neq 0\;\; e\;\; l\neq\infty \quad\Rightarrow \sum a_n \; e \; \sum b_n \;\; hanno\, lo\, stesso\, comportamento$$

$$Se\quad l=0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} Se\sum b_n=\infty \;\Rightarrow\; non\, si\, può\, dire\, niente \\ Se\sum b_n<\infty \;\Rightarrow\; \sum a_n<\infty \end{cases}$$

$$Se\quad l=+\infty \qquad \Rightarrow \begin{cases} Se\sum b_n<\infty \;\Rightarrow\; non\, si\, può\, dire\, niente \\ Se\sum b_n=\infty \;\Rightarrow\; \sum a_n=\infty \end{cases}$$

SERIE NOTEVOLI

Serie armonica generalizzata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\begin{cases}<\infty & se\quad \alpha>1\\ +\infty & se\quad \alpha\leq 1\end{cases}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^\alpha}=\begin{cases}<\infty & se\quad \alpha>1\\ +\infty & se\quad \alpha\leq 1\end{cases}$$

CRITERIO DELLA RADICE

Se $\sqrt[n]{a_n}\to\beta\in\mathbb{R}\cup+\infty$ allora:

$se\;\;|\beta|>1\;\Rightarrow\;\sum a_n=+\infty$

$se\;\;|\beta|<1\;\Rightarrow\;\sum a_n<\infty$

$se\;|\beta|=1\;\Rightarrow$ Non si può concludere nulla in base al criterio della radice.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\to\beta\in\mathbb{R}\cup+\infty$ allora:

$se\;\;|\beta|>1\;\Rightarrow\;\sum a_n=+\infty$

$se\;\;|\beta|<1\;\Rightarrow\;\sum a_n<\infty$

$se\;|\beta|=1\;\Rightarrow$ Non si può concludere nulla in base al criterio della radice.

CRITERIO DI CONDENSAZIONE

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge se e solo se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^n a_{2^n}$

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A SEGNI ALTERNI

CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA

$$\begin{cases} se \quad \sum |a_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum a_n < \infty \\ se \quad \sum |a_n| > \infty \quad \Rightarrow \quad non\; si\; può\; concludere\; nulla \end{cases}$$

SERIE DI LEIBENITZ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$$

Converge se:

$(i) \quad \alpha_n \geq 0 \quad \forall n > n_1$

$(ii) \quad \alpha_n \to 0$

$(iii) \alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall n > n_2 \quad (successione\ debolmente\ decrescente)$

La seconda condizione corrisponde alla condizione necessaria e quindi se non è verificata la serie diverge. Se le altre due non sono verificate allora non si può concludere nulla.