TEOREMI DI CESARO

TEOREMA DI CESARO-STOLTZ

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni numeriche, con $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ strettamente positiva, strettamente crescente e illimitata.

Se esiste il limite $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, allora esiste anche il limite $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ e i due valori coincidono:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Esempio:

Supponiamo di voler calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{k+1}}{n^2}$$

Svolgimento:

Per fare ciò definiamo

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{k+1} \quad \text{e} \quad b_n=n^2$$

A questo punto calcoliamo il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n+1)(n+1)}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

E per il teorema di Cesaro-Stoltz si avrà che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{k+1}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}$$

I TEOREMA DI CESARO

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, consideriamo la successione $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle sue medie, ovvero la successione definita da

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n\in\mathbb{N}$$

Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al valore l, allora anche $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = l$$

II TEOREMA DI CESARO

Supponiamo che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia tale che:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = l$$

Allora vale anche

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

III TEOREMA DI CESARO

Supponiamo che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ abbia limite l e che si abbia $a_n > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} = l$$

IV TEOREMA DI CESARO (CRITERIO DEL RAPPORTO-RADICE)

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Vale la seguente implicazione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$$

Esempio:

Si vuole calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

Soluzione

Per cominciare portiamo tutto sotto radice:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

Per il IV teorema di Cesaro posso calcolare equivalentemente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

Quindi possiamo concludere che il risultato del nostro limite è:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$